



ROGER MANSUY • RACHED MNEIMNÉ

Algèbre linéaire

Réduction des endomorphismes

3^e
édition

LICENCE 2 & 3
MATHÉMATIQUES
CPGE
CAPES & AGRÉGATION

- Cours complet
- Commentaires et développements
- Plus de 170 exercices corrigés



ROGER MANSUY • RACHED MNEIMNÉ

Algèbre linéaire

Réduction des endomorphismes

3^e
édition

deboeck **B**
SUPÉRIEUR

Chez le même éditeur (extrait du catalogue)

BELHAJ S., *Mathématiques pour l'économie et la gestion*
BELHAJ S., BEN AISSA A., *Mathématiques pour l'informatique*
BRIANE M., PAGÈS G., *Analyse. Théorie de l'intégration – 7^e édition*
BURG P., *Mathématiques. Les fondamentaux en Licence 1*
CANON É., *Analyse numérique*
CARASSUS L., PAGÈS G., *Finance de marché. Modèles mathématiques à temps discret*
CARTON O., *Langages formels. Calculabilité et complexité*
CHOULLI M., *Analyse fonctionnelle*
CHOULLI M., *Analyse complexe*
COTTET-EMARD F., *36 problèmes corrigés pour le CAPES de mathématiques*
COTTET-EMARD F., *Probabilités et tests d'hypothèses*
COTTET-EMARD F., *Algèbre linéaire et bilinéaire*
COTTET-EMARD F., *Analyse*
COTTET-EMARD F., *Toutes les maths – Analyse en 40 fiches*
COTTET-EMARD F., *Toutes les maths – Algèbre et probabilités en 62 fiches*
DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Analyse pour la Licence*
DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Algèbre et géométrie pour la Licence*
DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Probabilités pour la Licence*
DEPAUW J., *Statistiques*
GIRARDIN V., LIMNIOS N., *Probabilités et introduction à la statistique*
PAGÈS G., *101 quizz qui banquent. Mathématiques et finances sont-elles indépendantes ?*
WASSEF P., *Algèbre., Arithmétique pour l'informatique*

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine
de spécialisation, consultez notre site web :

www.deboecksuperieur.com

En couverture : Coupe d'un nautile © AdrianHancu/Getty Images
Maquette intérieure : Hervé Soulard/Nexeme
Mise en pages de l'auteur
Maquette de couverture : Primo&Primo
Couverture : SCM, Toulouse

Dépôt légal :
Bibliothèque royale de Belgique : 2022/13647/006
Bibliothèque nationale, Paris : février 2022
ISBN : 978-2-8073-3661-2

*Tous droits réservés pour tous pays.
Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie)
partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données
ou de le communiquer au public, sous quelque forme ou de quelque manière que ce soit.*

© De Boeck Supérieur SA, 2022 - Rue du Bosquet 7, B1348 Louvain-la-Neuve
De Boeck Supérieur - 5 allée de la 2^e DB, 75015 Paris

Table des matières

I. Polynômes d'endomorphismes	1
1. Un morphisme d'algèbres	1
2. Idéal des polynômes annulateurs	2
3. Polynôme minimal	4
4. Utilisation pratique d'un polynôme annulateur	5
5. Commentaires et développements	8
6. Exercices	9
II. Sous-espaces stables	15
1. Restriction d'une application linéaire	15
2. Sous-espaces stables	17
3. Endomorphisme induit sur un sous-espace stable	17
4. Exemples de sous-espaces stables	18
5. Sous-espaces cycliques	19
6. Commentaires et développements	20
7. Exercices	22
III. Commutation	27
1. Définitions	27
2. Calculs de commutants	29
3. Endomorphisme ad_u	30
4. Commentaires et développements	32
5. Exercices	33
IV. Lemme des noyaux	41
1. Étude des sous-espaces $\ker P(u)$	41
2. Lemme des noyaux	43
3. Décomposition avec des sous-espaces stables	44
4. Commentaires et développements	46
5. Exercices	47

V. Éléments propres, caractéristiques	51
1. Définitions	51
2. Polynôme caractéristique	54
3. Commentaires et développements	56
4. Exercices	58
VI. Endomorphismes cycliques	67
1. Définitions	67
2. Caractérisation avec le polynôme minimal	68
3. Caractérisation avec le commutant	69
4. Matrices compagnons	71
5. Polynôme caractéristique	73
6. Commentaires et développements	75
7. Exercices	77
VII. Théorème de Cayley & Hamilton	81
1. Énoncé et conséquences	81
2. Preuve par les sous-espaces cycliques	82
3. Preuve par la formule de la comatrice	82
4. Sous-espaces caractéristiques	83
5. Multiplicités	83
6. Commentaires et développements	84
7. Exercices	86
VIII. Diagonalisation	89
1. Définitions	89
2. Critères de diagonalisation	90
3. Critère de co-diagonalisation	94
4. Commentaires et développements	95
5. Exercices	96
IX. Trigonalisation	105
1. Critères de trigonalisation	105
2. Critère de co-trigonalisation	107
3. Fonctions symétriques des valeurs propres	108
4. Commentaires et développements	111
5. Exercices	112
X. Réduction dans un espace euclidien	119
1. Rappels sur l'adjoint d'un endomorphisme	119
2. Endomorphismes orthogonaux	120
3. Endomorphismes symétriques réels	124
4. Décomposition polaire	126
5. Endomorphismes normaux réels	128

Table des matières

v

6. Commentaires et développements	131
7. Exercices	132
XI. Réduction de Jordan	141
1. Décomposition de Jordan & Dunford	141
2. Réduction de Jordan : cas nilpotent	143
3. Interlude : lire un tableau de Young	148
4. Réduction de Jordan : cas général	149
5. Commentaires et développements	150
6. Exercices	152
XII. Réduction de Frobenius	161
1. Réduction de Frobenius	161
2. Retour sur la réduction de Jordan	164
3. Commutants et bicommutants	167
4. Commentaires et développements	170
5. Exercices	171
XIII. Topologie des classes de similitude	175
1. Rappels sur la relation de similitude	175
2. Classes de similitude dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$	176
3. Adhérence d'une classe de similitude	180
4. Connexité d'une classe de similitude	182
5. Commentaires et développements	183
6. Exercices	184
XIV. Localisation des valeurs propres	189
1. Théorème de Hadamard	189
2. Disques de Gerschgorin	190
3. Rayon spectral	192
4. Théorème de Perron	195
5. Théorème de Perron & Frobenius	198
6. Commentaires et développements	200
7. Exercices	201
XV. Application aux chaînes de Markov finies	209
1. Chaînes de Markov	209
2. Matrice de transition	211
3. Probabilité invariante	213
4. Théorème ergodique	215
5. Commentaires et développements	217
6. Exercices	218

XVI. Exponentielle de matrices	221
1. Définitions	221
2. Exponentielle de matrices nilpotentes	224
3. Exponentielle de matrices diagonalisables	225
4. Exponentielle et décomposition de Jordan & Dunford	226
5. Application exp	227
6. Systèmes différentiels linéaires	228
7. Commentaires et développements	231
8. Exercices	233
Annexe A. Parallèle avec les groupes abéliens finis	239
1. A -modules	239
2. Lexique	240
2.1. Cadre d'étude	240
2.2. Polynôme minimal	241
2.3. Polynôme caractéristique	241
2.4. Endomorphisme cyclique	242
2.5. Réduction de Frobenius	242
Notations	243
Index	245

Avant-propos

Qu'est-ce que la réduction ?

Dans tout cours d'algèbre linéaire, la réduction des matrices et des endomorphismes occupe une place importante. Toutefois, ce terme de réduction cache différentes réalités et perspectives.

▷ D'une part, réduire un endomorphisme u d'un espace de dimension finie, c'est trouver une base dans laquelle l'endomorphisme u est « bien compris » et « facilement manipulable ». En pratique, cela revient à pouvoir déterminer une matrice de l'endomorphisme avec une forme particulière : diagonale (dans le meilleur des cas), diagonale par blocs, triangulaire...

Pour une matrice carrée M , l'équivalent de cette démarche consiste à chercher une matrice d'une forme particulière semblable à M : en effet, la formule de changement de bases pour la matrice d'un endomorphisme n'est autre que la traduction de la similitude de deux matrices.

▷ D'autre part, réduire un endomorphisme (respectivement une matrice) c'est comprendre l'ensemble de toutes les matrices qui lui sont associées (respectivement sa classe de similitude) ; pour ce faire, on cherche une matrice réduite qui décrit simplement, qui caractérise cet ensemble. En avançant dans cette direction, on retrouve les invariants de similitude (pour la réduite de Frobenius) ou les tableaux de Young (pour la réduite de Jordan).

Un cours complet comporte a priori les deux aspects imbriqués avec quelques applications endogènes de l'algèbre linéaire mais aussi exogènes en provenance de l'algèbre bilinéaire, de la topologie, de la géométrie, des probabilités...

Qu'apporte ce livre ?

Il existe de nombreux livres pour les étudiants de premiers cycles qui traitent certains des aspects de la réduction mais peu présentent toute la richesse du sujet de manière accessible pour des étudiant-e-s des premiers cycles (et dans

les préparations aux concours de recrutement de l'Éducation Nationale). Nous avons donc cherché à fournir une introduction raisonnée à l'ensemble de la réduction. Le livre se découpe grossièrement en parties avec des objectifs distincts.

▷ Tout d'abord, les sept premiers chapitres présentent dans un ordre assez classique les outils de la suite du livre. L'algèbre des polynômes en un endomorphisme (respectivement une matrice carrée) joue évidemment un rôle essentiel. Nous avons pris le parti de privilégier l'aspect élémentaire donc de cacher, au moins en apparence, la structure de $\mathbf{K}[X]$ -module. En revanche, nous avons insisté sur l'étude des sous-espaces stables de la forme $\ker P(u)$ trop souvent limitée au lemme des noyaux et aux sous-espaces propres et caractéristiques. Par exemple, le lemme IV-3.4 établit l'existence d'un sous-espace cyclique maximal de dimension le degré du polynôme minimal : ce résultat simple est riche pour la suite.

De même, nous avons choisi de mettre en exergue les endomorphismes cycliques (chapitre VI) à la fois pour fournir une démonstration simple du théorème de Cayley & Hamilton mais aussi pour le lemme VI-3.3, qui établit l'existence du supplémentaire stable d'un sous-espace cyclique maximal. L'idée est bien évidemment de préparer le terrain aux réductions de Jordan et Frobenius en se familiarisant avec l'argument des preuves par récurrence.

▷ Une fois tous ces outils mis en place, deux petits chapitres décrivent les critères simples de diagonalisation, de trigonalisation, de réduction simultanée... Il s'agit simplement de combiner tout ce qui a été détaillé précédemment. Cela constitue un objectif de nombreux cours de premiers cycles mais ce n'est ici qu'un jalon dans le parcours.

▷ Même si l'algèbre bilinéaire est un tantinet exogène par rapport au propos de ce livre, le chapitre X se focalise sur les endomorphismes particuliers d'un espace euclidien : endomorphismes orthogonaux, autoadjoints ou, plus généralement, normaux. Cela fournit également la possibilité de discuter de propriétés de matrices réelles symétriques définies positives et de la décomposition polaire.

▷ Les chapitres XI et XII présentent deux formes réduites normalisées : celle de Jordan d'une part et celle de Frobenius d'autre part; nous ne nous arrêtons bien évidemment pas à l'existence de ces réductions mais nous cherchons à en montrer l'utilité pratique avec de nombreux exercices sur les tableaux de Young ou les algorithmes pour passer d'une forme réduite à l'autre.

▷ Le chapitre XIII exploite les différentes caractérisations de la similitude obtenue jusqu'à présent pour donner dans le cadre réel ou complexe des descriptions géométriques et topologiques des classes de similitude.

▷ La séquence suivante répond à un problème différent : il s'agit de chercher approximativement où se trouvent les valeurs propres d'une matrice complexe. Ce sujet est souvent une introduction au calcul matriciel numérique;

nous avons choisi d'en détailler une autre application classique avec les chaînes de Markov homogènes finies. L'application du théorème de Perron & Frobenius est alors assez élémentaire et pourtant parlante sur l'importance de ce résultat.

► Le chapitre XVI est consacré aux exponentielles de matrices. Après avoir introduit ce concept, nous montrons comment la réduction des matrices permet de calculer ou de décrire les propriétés de l'exponentielle.

Voilà pour le contenu du livre. Passons maintenant à la forme.

Le contenu des chapitres est présenté de manière didactique dans une démarche très conventionnelle parsemant de nombreux exemples (certains étant très élémentaires) l'enchaînement des propositions et leurs preuves détaillées. Certaines preuves sont délicates et il peut être astucieux de les sauter lors d'une première lecture afin de comprendre correctement les énoncés puis d'y revenir plus tard à tête reposée.

Toutefois, à la fin de chaque chapitre, une section intitulée « Commentaires et développements » détonne : il s'agit de remarques moins détaillées mais néanmoins profondes, d'ouvertures pour permettre d'aller plus loin, il ne s'agit plus de faire cours mais de suggérer un travail personnel.

La dernière partie de chaque chapitre est bien évidemment constituée d'exercices ; les corrections sont détaillées pour pouvoir être lues facilement même si nous préconisons plutôt de ne pas les lire trop rapidement. Certains exercices sont relativement classiques, d'autres plus originaux : nous avons choisi de ne pas indiquer la difficulté pour ne pas biaiser le lecteur dans son effort de recherche.

Remerciements

Un grand remerciement va aux relectrices et relecteurs des précédentes éditions qui nous ont signalé coquilles et autres imprécisions. Les éventuelles erreurs restantes sont bien entendu la responsabilité des auteurs.

Conventions – à lire!

L'ensemble des notations est détaillé dans l'index en fin d'ouvrage. Précisons quelques conventions.

Dans tout l'ouvrage, sauf précisions contraires, E désigne un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie où $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Nous pratiquons abusivement l'identification d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ à l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé ; cela nous amène par exemple quelquefois à dire qu'une matrice est injective ou qu'elle laisse stable un sous-espace.

Algèbre linéaire

Roger Mansuy, Rached Mneimné

29 novembre 2021 [14:9]

Fichier:9782807336612_Algebre_lineaire_3e

chapitre:0

Chapitre I

Polynômes d'endomorphismes

Objectifs du chapitre

- Comprendre l'importance de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ des polynômes en un endomorphisme u donné.
- Calculer, sur des exemples simples, le polynôme minimal d'un endomorphisme.
- Utiliser les polynômes annulateurs pour calculer les puissances ou l'inverse (s'il existe).

1. Un morphisme d'algèbres

1.1. Définition. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

▷ Les puissances (de composition) de u sont les endomorphismes de E définis récursivement par $u^0 = \text{Id}_E$ et, pour tout $k \in \mathbf{N}$, par la relation

$$u^{k+1} = u \circ u^k = u^k \circ u.$$

▷ Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$, l'endomorphisme $P(u)$ de E est défini par

$$P(u) = \sum_{k=0}^N \alpha_k u^k.$$

1.2. Exemple. Par exemple, pour le polynôme $P = X^3 + 2X - 1$ et un endomorphisme u , l'endomorphisme $P(u)$ vaut $u^3 + 2u^1 - u^0 = u^3 + 2u - \text{Id}_E$.

1.3. Remarque. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, on définit de même la matrice $P(A)$ à partir des puissances de A . Il est important de remarquer que si A est la matrice d'un endomorphisme u dans une base $\mathcal{B}$, alors $P(A)$ est la matrice de l'endomorphisme $P(u)$ dans cette même base $\mathcal{B}$.

1.4. Remarque. Attention aux erreurs de notation entre polynômes et polynômes en un endomorphisme u . Par exemple, on veille bien à ne pas mélanger les écritures suivantes pour $P, Q \in \mathbf{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$:

- $P(u)(x)$, qui est un vecteur, et $P(u(x))$ qui n'est en général pas défini (qu'est-ce qu'une puissance du vecteur $u(x)$?) ;
- $(P \cdot Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$ et $(P \circ Q)(u)$ qui sont deux endomorphismes a priori différents.

1.5. Proposition. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et deux polynômes P et $Q \in \mathbf{K}[X]$. Alors, les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Démonstration. Par linéarité, il suffit de noter que, pour tous m et $n \in \mathbf{N}$,

$$u^m \circ u^n = u^{m+n} = u^n \circ u^m.$$

□

1.6. Proposition. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . L'application qui à un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ associe l'endomorphisme $P(u)$ est un morphisme d'algèbres.

L'image de ce morphisme, notée $\mathbf{K}[u]$, est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

2. Idéal des polynômes annulateurs

2.1. Définition. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $P \in \mathbf{K}[X]$. Un polynôme P est annulateur de u si l'endomorphisme $P(u)$ est l'endomorphisme nul.

2.2. Remarque. Comme précédemment, cette notion est définie de manière analogue pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: un polynôme P est annulateur de A si la matrice $P(A)$ est nulle.

2.3. Proposition. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur non nul.

Démonstration. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E de dimension n . Alors, la famille $(u^0 = \text{Id}_E, u^1, \dots, u^{n^2})$ comporte $n^2 + 1$ vecteurs de

2. Idéal des polynômes annulateurs

3

l'espace $\mathcal{L}(E)$, lequel est de dimension n^2 : elle est par conséquent liée. Il existe donc des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Par conséquent, le polynôme $\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k$ est annulateur de u . □

2.4. Remarque. Nous verrons plus loin (avec le théorème de Cayley & Hamilton) qu'en dimension n , on peut déterminer un polynôme annulateur de degré n (le polynôme caractéristique).

2.5. Exemple. Le seul endomorphisme qui admet $aX + b$ comme polynôme annulateur avec $a \neq 0$ est l'homothétie de rapport $-\frac{b}{a}$.

En dimension infinie, il existe des endomorphismes qui n'admettent pas de polynôme annulateur non nul.

2.6. Exemple. La dérivation usuelle $D : P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$ qui n'admet pas de polynôme annulateur non nul.

En effet, raisonnons par l'absurde : si D admet un polynôme annulateur Q , alors, pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, $Q(D)(P) = 0$. Or, avec $P = X^{\deg Q+1}$, le polynôme $Q(D)(P)$ est de degré 1 donc non nul : contradiction.

2.7. Définition. Un endomorphisme est nilpotent s'il admet un monôme comme polynôme annulateur.

2.8. Proposition. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . L'ensemble $\mathcal{J}_u \subset \mathbf{K}[X]$ des polynômes annulateurs de u est un idéal de l'anneau $\mathbf{K}[X]$.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{J}_u$ est non vide : pour tous $P, Q \in \mathcal{J}_u$, $P - Q \in \mathcal{J}_u$ car

$$(P - Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} - 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)},$$

Par ailleurs, pour tous $P \in \mathcal{J}_u$ et $Q \in \mathbf{K}[X]$, $QP \in \mathcal{J}_u$, car

$$(QP)(u) = Q(u) \circ P(u) = Q(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

□

2.9. Remarque. On aurait également pu remarquer que $\mathcal{J}_u$ est simplement le noyau du morphisme d'algèbres associé à u .

2.10. Remarque. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, on peut aussi définir l'ensemble

$$\mathcal{I}_{u,x} = \{P \in \mathbf{K}[X], P(u)(x) = 0_E\}.$$

C'est encore un idéal de $\mathbf{K}[X]$ et il vérifie $\mathcal{I}_u \subset \mathcal{I}_{u,x}$.

3. Polynôme minimal

Comme l'anneau $\mathbf{K}[X]$ est euclidien, il est en particulier principal, donc chaque idéal (non réduit à 0) de $\mathbf{K}[X]$ peut être engendré par un unique polynôme unitaire. Ceci justifie la définition suivante (conjointement avec l'hypothèse que l'espace E est de dimension finie donc que l'idéal des polynômes annulateurs est non réduit au seul polynôme nul).

3.1. Définition. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Le polynôme minimal de u est l'unique polynôme unitaire, noté μ_u , qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs de u .

3.2. Remarque. Il est facile de voir que, pour un endomorphisme u , la dimension de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ est le degré du polynôme minimal μ_u . Ceci sera détaillé avec la proposition I-4.4.

Déterminons l'idéal des polynômes annulateurs de quelques endomorphismes remarquables.

3.3. Exemple. Si u est un endomorphisme nilpotent, il admet un polynôme annulateur de la forme X^p . Par conséquent, le polynôme minimal est donc un monôme X^k avec $k \in [1, p]$. Cet entier k est appelé indice de nilpotence de u . Un polynôme est alors annulateur de u s'il est multiple de X^k , c'est-à-dire si 0 en est une racine de multiplicité au moins k .

3.4. Exemple. Si h est une homothétie de E , il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $h = \lambda \text{Id}_E$. Par conséquent, $X - \lambda$ est un polynôme annulateur de degré 1, donc minimal. Un polynôme annulateur de h est donc un multiple de $X - \lambda$, c'est-à-dire un polynôme admettant λ comme racine.

3.5. Exemples. $\triangleright$ Si p est un projecteur, alors un polynôme annulateur de p est, par définition, $X^2 - X$. Ce polynôme est le polynôme minimal de p sauf si p est l'identité ou l'application nulle (en effet, s'il n'est pas minimal, alors p admet un polynôme annulateur de degré 1, donc est une homothétie).

$\triangleright$ De même, le polynôme minimal d'une symétrie vectorielle qui n'est pas une homothétie, c'est-à-dire différente de $\pm \text{Id}_E$, est $X^2 - 1$.

3.6. Définition. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $x \in E$. Le polynôme minimal local en x de u est l'unique polynôme unitaire, noté $\mu_{u,x}$, qui engendre l'idéal $\mathcal{I}_{u,x}$ des polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ tels que $x \in \ker P(u)$.

4. Utilisation pratique d'un polynôme annulateur

Calcul de l'inverse

4.1. Proposition. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E admettant un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. Alors, u est inversible. De plus, son inverse appartient à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$.

Démonstration. Écrivons $P(X) = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$ avec $N > 0$ et $\alpha_0 = P(0) \neq 0$. Alors, l'hypothèse $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ se réécrit

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k u^k = -\alpha_0 \text{Id}_E.$$

En considérant l'endomorphisme

$$v = -\frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=1}^N \alpha_k u^{k-1} \in \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{N-1}),$$

on obtient $u \circ v = v \circ u = \text{Id}_E$. Ainsi, u est inversible et que $u^{-1} = v$. □

Donnons une seconde démonstration de ce résultat.

Démonstration. Comme $P(0) \neq 0$, les polynômes P et X n'ont pas de racine complexe commune et sont donc premiers entre eux : par le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbf{C}[X]$ tels que $UP + VX = 1$. En appliquant le morphisme d'algèbres associé à u , on obtient $V(u) \circ u = \text{Id}_E$. Ainsi, u est inversible et

$$u^{-1} = V(u) \in \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{N-1}).$$

□

4.2. Exemple. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E qui vérifie

$$(u - 2\text{Id}_E) \circ (u - 3\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)},$$

sans être une homothétie. Cherchons les réels λ tels que $v_\lambda = u - \lambda \text{Id}_E$ soit non inversible (nous verrons plus loin que ces réels sont, par définition, les valeurs propres de u). Comme le polynôme $(X - 2)(X - 3)$ est annulateur de u , on en déduit que $(X + \lambda - 2)(X + \lambda - 3)$ est annulateur de v_λ . Donc, si $\lambda \notin \{2, 3\}$, l'endomorphisme v_λ est inversible, car son polynôme annulateur n'admet pas 0 pour racine. En revanche, ni v_2 , ni v_3 ne sont inversibles, car sinon l'autre est nul (et donc u est une homothétie) puisque $v_2 \circ v_3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

La réciproque du résultat précédent est bien évidemment fausse avec un polynôme annulateur quelconque : si P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u , alors XP est aussi annulateur et admet 0 pour racine, que u soit inversible ou non. En revanche, la situation est plus claire avec le polynôme minimal.

4.3. Proposition. *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Alors, u est inversible si, et seulement si, son polynôme minimal μ_u n'admet pas 0 comme racine.*

Démonstration. Avec la proposition précédente, il suffit d'étudier le sens direct. Supposons que u est inversible et que 0 est racine du polynôme minimal μ_u de u , c'est-à-dire $\mu_u = XP$. On en déduit $u \circ P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$; or, u inversible et par conséquent $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, ce qui contredit la minimalité de μ_u . Par conséquent, le polynôme minimal μ_u n'admet pas 0 comme racine. $\square$

Calculs de puissances

4.4. Proposition. *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E admettant un polynôme annulateur de degré N . Alors, pour tout entier $m \in \mathbf{N}$,*

$$u^m \in \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{N-1}).$$

Démonstration. Soit $m \in \mathbf{N}$. D'après la division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$, il existe $(Q_m, R_m) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $X^m = Q_m P + R_m$, avec $\deg R_m < \deg P = N$. Alors, en utilisant le morphisme d'algèbres associé à u et le fait que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on trouve que

$$\begin{aligned} u^m &= Q_m(u) \circ P(u) + R_m(u) \\ &= R_m(u) \in \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{N-1}). \end{aligned}$$

$\square$

En fait, on peut aussi utiliser en pratique la démonstration de ce résultat pour obtenir l'expression explicite de u^m pour tout entier $m \in \mathbf{N}$. Il suffit pour cela de savoir obtenir le reste dans une division de polynômes. Détaillons les calculs dans quelques cas particuliers.

4.5. Exemple. Soit $a, b \in \mathbf{C}$ avec $a \neq b$ et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E dont un polynôme annulateur est $P = (X - a)(X - b)$.

Déterminons u^m pour tout entier $m \in \mathbf{N}$. Le reste de la division euclidienne de X^m par P est un polynôme de degré au plus 1, que nous noterons $\alpha_m X + \beta_m$. Reste à déterminer les valeurs des complexes α_m et β_m . Pour cela, spécifions la

4. Utilisation pratique d'un polynôme annulateur

7

relation de division euclidienne en a et en b :

$$\begin{cases} a^m &= a\alpha_m + \beta_m \\ b^m &= b\alpha_m + \beta_m \end{cases}$$

En conclusion, $\alpha_m = \frac{a^m - b^m}{a - b}$ et $\beta_m = \frac{ba^m - ab^m}{b - a}$ donc

$$u^m = \frac{a^m - b^m}{a - b} u + \frac{ba^m - ab^m}{b - a} \text{Id}_E.$$

4.6. Remarque. Plus généralement, la même méthode permet de traiter le cas où l'endomorphisme u admet un polynôme annulateur P scindé avec des racines simples $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Dans ce cas, pour tout $m \in \mathbb{N}$, le reste de la division du monôme X^m par ce polynôme P est

$$\sum_{k=0}^p \lambda_k^m L_k,$$

où $L_1, \dots, L_p$ désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. On obtient, avec le morphisme d'algèbres associé à u ,

$$u^m = \sum_{k=0}^p \lambda_k^m L_k(u).$$

Lorsque le polynôme annulateur est scindé mais avec des racines multiples, le problème est à peine plus compliqué et se ramène encore à un problème d'interpolation.

4.7. Exemple. Déterminons les puissances d'un endomorphisme u de polynôme annulateur $(X - a)^2$.

Soit m un entier. Le reste de la division euclidienne de X^m par $(X - a)^2$ est un polynôme de degré au plus 1 que nous noterons $\alpha_m X + \beta_m$. On a donc :

$$X^m = Q \cdot (X - a)^2 + \alpha_m X + \beta_m.$$

Reste à déterminer les valeurs des complexes α_m et β_m . Pour cela, nous spécifions cette relation en a puis dérivons cette relation avant de spécifier en a (tous les termes où apparaît Q s'annulent, car a est racine double de $(X - a)^2$). Ainsi,

$$\begin{cases} a^m &= a\alpha_m + \beta_m \\ ma^{m-1} &= \alpha_m \end{cases}$$

En conclusion, $\alpha_m = ma^{m-1}$ et $\beta_m = (1 - m)a^m$, donc

$$u^m = ma^{m-1} u + (1 - m)a^m \text{Id}_E.$$

5. Commentaires et développements

5.1. La donnée d'une matrice A met en évidence le morphisme d'algèbres

$$\Phi_A : \begin{cases} \mathbf{K}[X] & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ P & \mapsto P(A) \end{cases}$$

Son noyau, l'idéal $\ker \Phi_A$, est non nul, pour des raisons de dimension. Il est engendré par le polynôme minimal μ_A ; l'image $\operatorname{im} \Phi_A = \mathbf{K}[A]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, dont la dimension se déduit aisément de l'isomorphisme de $\mathbf{K}$ -algèbres

$$\overline{\Phi_A} : \mathbf{K}[X]/(\mu_A) \xrightarrow{\cong} \mathbf{K}[A].$$

Ainsi, la dimension de l'algèbre $\mathbf{K}[A]$ est égale à celle de l'espace vectoriel quotient $\mathbf{K}[X]/(\mu_A)$. C'est donc le degré d_A du polynôme minimal μ_A de la matrice A . En effet, les classes des polynômes $1, X, \dots, X^{d_A-1}$ forment une base de cet espace quotient. Le fait que ces vecteurs soient générateurs provient d'une simple division euclidienne par le polynôme μ_A et le fait qu'ils soient libres provient du caractère minimal de μ_A .

Au niveau de l'algèbre $\mathbf{K}[A]$, cela se traduit par le fait que les matrices $I_n, A, \dots, A^{d_A-1}$ forment une base de l'algèbre des polynômes en A .

5.2. La structure de l'algèbre $\mathbf{K}[A]$ est donc celle d'un quotient d'un anneau de polynômes en une seule variable. Elle dépend uniquement du polynôme minimal de A . La structure de ces quotients-là, comme celle des anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, est bien connue et son étude se trouve grandement simplifiée par le théorème des restes chinois, qui montre que cette algèbre est produit d'algèbres locales, c'est-à-dire d'algèbres ayant chacune un idéal maximal unique (et pour une telle algèbre le treillis de leurs idéaux est alors une liane...).

5.3. Précisons donc que si le polynôme minimal est une puissance d'un polynôme irréductible, soit $\mu_A = \pi^m$ avec π un polynôme irréductible, l'algèbre quotient $\mathbf{K}[X]/(\mu_A)$, tout comme l'algèbre $\mathbf{K}[A]$, est une algèbre locale et son idéal maximal est l'idéal engendré par la classe du polynôme π . La démonstration est calquée sur celle de la mise en évidence des idéaux de l'anneau quotient $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ avec p premier (il est bon de savoir en général que les idéaux d'un quotient $R/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de l'anneau commutatif (unitaire) R , sont en correspondance bijective avec les idéaux de R qui contiennent l'idéal $\mathfrak{a}$ par lequel on a quotienté.).

5.4. Comme autre application, remarquons que l'algèbre $\mathbf{K}[A]$ est réduite (au sens qu'elle n'a d'autres nilpotents que 0_n) si, et seulement si, le polynôme minimal de A est sans facteur carré.

Quand $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, cela revient à dire que l'algèbre $\mathbf{K}[A]$ est un produit de corps isomorphes à $\mathbf{C}$. On verra une autre démonstration de ce fait ultérieurement (chapitre XI) avec la décomposition de Jordan & Dunford.

5.5. Nous avons vu que l'algèbre $\mathbf{K}[A]$ contenait l'inverse de A si A est inversible. On verra plus tard que les composantes semi-simple et nilpotente dans la décomposition de Jordan & Dunford de A sont aussi dans $\mathbf{K}[A]$, tout d'ailleurs comme la comatrice de A ou les opérateurs de projection sur les facteurs directs de la décomposition de E en somme d'espaces caractéristiques. Tout cela pour dire qu'au delà de sa structure elle-même, l'algèbre $\mathbf{K}[A]$ contient de par ses divers éléments des renseignements précieux.

5.6. L'idéal des polynômes annulateurs de A en le vecteur x est le noyau de l'application

$$\Phi_{A,x} : \begin{cases} \mathbf{K}[X] & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & P(A)(x) \end{cases}$$

Cette application est une simple application linéaire et, pourtant, son noyau est un idéal! En fait, cette application est $\mathbf{K}$ -linéaire, mais elle est aussi $\mathbf{K}[X]$ -linéaire, au sens que $\Phi_{A,x}(PQ) = P(A)(\Phi_{A,x}(Q))$. C'est en fait un morphisme de $\mathbf{K}[X]$ -modules et son noyau est donc un sous- $\mathbf{K}[X]$ -module de $\mathbf{K}[X]$, donc un idéal de $\mathbf{K}[X]$.

5.7. Le groupe des inversibles de l'algèbre $\mathbf{K}[A]$ est l'ensemble des matrices $Q(A)$, où Q est un polynôme premier avec μ_A .

6. Exercices

6.1. Exercice. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ deux matrices semblables et $P \in \mathbf{K}[X]$. Montrer que les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

▷ *Éléments de correction.* Par définition de la similitude, il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $A = UBU^{-1}$. Par une rapide récurrence, on obtient que $A^k = UB^kU^{-1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$; ensuite, par linéarité, $P(A) = UP(B)U^{-1}$: les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables. ◁

6.2. Exercice. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice semblable à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Montrons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $A = P(A^3)$.

▷ *Éléments de correction.* Par définition, il existe une matrice $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = U \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) U^{-1}$ et donc

$$A^3 = U \mathrm{diag}(\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3) U^{-1}.$$

Considérons un polynôme P , obtenu par exemple avec l'interpolation de Lagrange tel que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(\lambda_k^3) = \lambda_k$ (ce qui est possible car $\lambda_k^3 = \lambda_j^3$ entraîne $\lambda_k = \lambda_j$ car l'application $x \mapsto x^3$ est injective sur $\mathbf{R}$). Alors,

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(P(\lambda_1^3), P(\lambda_2^3), \dots, P(\lambda_n^3)) = P(\text{diag}(\lambda_1^3, \lambda_2^3, \dots, \lambda_n^3)),$$

et donc, en multipliant à gauche par U et à droite par U^{-1} , $A = P(A^3)$. $\triangleleft$

6.3. Exercice. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB = BA$. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{K}).$$

Pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B .

▷ *Éléments de correction.* ▷ Par une récurrence rapide, on obtient que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}.$$

▷ Par linéarité, on obtient que, pour tout polynôme P ,

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

6.4. Exercice. Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que $\mu_M = X^2 - \text{tr}(M)X$.
2. En déduire les puissances de M en fonction de M et I_n .

▷ *Éléments de correction.* On montre classiquement qu'il existe un vecteur colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et un vecteur ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ non nuls tels que $M = CL$.

1. La matrice M n'est pas une homothétie, donc le polynôme minimal est au moins de degré 2. De plus,

$$M^2 = CLCL = C(LC)L = (LC)CL = (LC)M,$$

car LC est un scalaire. Or, $LC = \text{tr}(LC) = \text{tr}(CL) = \text{tr}(M)$. Ainsi, le polynôme $X^2 - \text{tr}(M)X$ est annulateur de M , donc multiple de μ_M . En conclusion, $\mu_M = X^2 - \text{tr}(M)X$.

2. ▷ Si $\text{tr}(M) = 0$, alors $M^2 = 0_n$, donc $M^k = 0_n$ dès que $k \geq 2$.
 ▷ Sinon, effectuons la division euclidienne de X^k par μ_M : il existe un polynôme $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que

$$X^k = Q \cdot \mu_M + \text{tr}(M)^{k-1}X.$$

En effet, le reste dans la division euclidienne de X^k par μ_M est un poly-

nôme de degré au plus 1, qui est nul en 0 et qui vaut $\text{tr}(M)^k$ en $\text{tr}(M)$. On en déduit que, pour tout $k \geq 1$, $M^k = \text{tr}(M)^{k-1} M$.

Remarquons que ce dernier résultat peut aussi être déduit par une simple récurrence.

◁

6.5. Exercice. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E ; définissons l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ associé par composition à gauche $G_u : v \mapsto u \circ v$. Comparer μ_u et μ_{G_u} .

▷ *Éléments de correction.* Remarquons tout d'abord que, pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$ et tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $P(G_u)(v) = P(u) \circ v$ (le résultat se montre par récurrence pour les monômes puis par linéarité). Ainsi, μ_u est annulateur de G_u : μ_{G_u} divise μ_u .

▷ De plus, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $\mu_{G_u}(u) \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\mu_{G_u}(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et μ_{G_u} est annulateur de u : μ_u divise μ_{G_u} .

Comme les polynômes minimaux sont unitaires, on conclut que $\mu_u = \mu_{G_u}$. ◁

6.6. Exercice. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \mapsto & u + \text{tr}(u)\text{Id}_E \end{cases}$$

▷ *Éléments de correction.* L'endomorphisme Φ n'est pas une homothétie, donc son polynôme minimal est de degré au moins 2.

Par ailleurs, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\begin{aligned} \Phi^2(u) &= \Phi(u) + \text{tr}(\Phi(u))\text{Id}_E \\ &= u + \text{tr}(u)\text{Id}_E + \text{tr}(u)\text{Id}_E + n \text{tr}(u)\text{Id}_E \\ &= u + (n+2) \text{tr}(u)\text{Id}_E \\ &= (n+2)\Phi(u) - (n+1)\text{Id}_{\mathcal{L}(E)}(u). \end{aligned}$$

En conclusion, le polynôme (unitaire de degré 2) $X^2 - (n+2)X + (n+1)$ est annulateur donc c'est le polynôme minimal μ_Φ . ◁

6.7. Exercice. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $P \in \mathbf{K}[X]$. Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si, P est premier avec μ_u .

▷ *Éléments de correction.* Remarquons tout d'abord que, si un endomorphisme de la forme $P(u)$ est inversible, alors son inverse est dans l'algèbre $\mathbf{K}[P(u)]$ donc dans l'algèbre $\mathbf{K}[u]$.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. L'endomorphisme $P(u)$ est inversible si, et seulement si, il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P(u) \circ Q(u) = \text{Id}_E$, c'est-à-dire si $PQ - 1$ est annulateur de u

donc un multiple de μ_u . D'après le théorème de Bézout, cette dernière condition équivaut à : P est premier avec μ_u .

On peut noter que l'algorithme d'Euclide (étendu) nous fournit ici l'inverse.

Une conséquence de cet exercice montre que l'anneau $\mathbf{K}[u]$ est un corps si, et seulement si, le polynôme minimal μ_u est irréductible sur $\mathbf{K}$. $\triangleleft$

6.8. Exercice. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Notons, pour tout $x \in E$, $\mu_{u,x}$ le polynôme minimal de u local en x , c'est-à-dire l'unique polynôme unitaire engendrant l'idéal

$$\mathcal{I}_{u,x} = \{P \in \mathbf{K}[X], P(u)(x) = 0_E\}.$$

Montrer que l'ensemble $\{\mu_{u,x}, x \in E\}$ est fini.

$\triangleright$ *Éléments de correction.* Remarquons que, pour tout $x \in E$,

$$\mu_u(u)(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E.$$

Ainsi, $\mu_u \in \mathcal{I}_{u,x}$ et par conséquent $\mu_{u,x}$ divise μ_u . Comme μ_u admet un nombre fini de diviseurs unitaires (et l'on peut calculer ce nombre à partir de la décomposition en facteurs irréductibles de μ_u), l'ensemble $\{\mu_{u,x}, x \in E\}$ est fini. $\triangleleft$

6.9. Exercice. Soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer les vecteurs $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tels que $\mu_{A,X} = \mu_A$ où $\mu_{A,X}$ désigne comme dans l'exercice précédent, le plus petit polynôme P unitaire tel que $P(A)X = 0_{n,1}$.

$\triangleright$ *Éléments de correction.* Notons $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs de la diagonale de A (on verra plus tard qu'il s'agit du spectre de A).

Remarquons que μ_A est le produit des facteurs $X - \lambda$ pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$: ainsi, $\mu_{A,X} = \mu_A$ si, et seulement si, $\mu_{A,X}(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

En notant $X = (x_i)_i$, pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, $P(A)X = (x_i P(\lambda_i))_i$. Ainsi, $P(A)X = 0_{n,1}$ si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i P(\lambda_i) = 0$ donc $x_i = 0$ ou $P(\lambda_i) = 0$.

En conclusion, $\mu_{A,X} = \mu_A$ si, et seulement si, pour toute valeur $\lambda \in \text{Sp}(A)$, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $\lambda_i = \lambda$ et $x_i \neq 0$.

En termes plus avancés, un tel vecteur X est somme des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres. $\triangleleft$

6.10. Exercice. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et

$$\mathcal{J} = \{P \in \mathbf{K}[X], P(u) \text{ est nilpotent}\}.$$

Montrer que $\mathcal{J}$ est un idéal puis déterminer, en fonction de μ_u , un élément générateur.

▷ *Éléments de correction.* ▷ Soit P et $Q \in \mathcal{J}$. Les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ sont nilpotents et commutent donc l'endomorphisme $(P - Q)(u) = P(u) - Q(u)$ est nilpotent d'après la formule du binôme (appliquée avec pour exposant la somme des indices de nilpotence de $P(u)$ et $Q(u)$) : $P - Q \in \mathcal{J}$.

▷ Soit $P \in \mathcal{J}$ et $R \in \mathbf{K}[X]$. L'endomorphisme $P(u)$ est nilpotent, $R(u)$ et $P(u)$ commutent donc $(RP)(u) = R(u)^n \circ P(u)^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi, $RP \in \mathcal{J}$.

En conclusion, $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathbf{K}[X]$.

Enfin, notons que P appartient à $\mathcal{J}$ si, et seulement si, μ_u divise P^n , c'est-à-dire si $\tilde{\mu}_u$ divise P où $\tilde{\mu}_u$ est le produit des facteurs irréductibles distincts de μ_u . Un générateur de $\mathcal{J}$ est donc ce polynôme $\tilde{\mu}_u$. ◁

6.11. Exercice. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente et G l'ensemble des matrices de la forme $P(N)$ avec $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(0) = 1$. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

▷ *Éléments de correction.* ▷ Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(0) = 1$. Comme P et X^n n'ont pas de racine complexe commune, ils sont premiers entre eux : par le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbf{C}[X]$ tels que $UP + VX^n = 1$.

En évaluant en 0, $U(0) = 1$ puis en appliquant le morphisme d'algèbres associé à N , on obtient $U(N)P(N) = I_n$.

Ainsi, la matrice $P(N)$ est inversible et son inverse $U(N)$ appartient à G .

▷ La partie G est stable par produit, car le produit de deux polynômes valant 1 en 0 vaut 1 en 0.

En conclusion, G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. ◁

6.12. Exercice. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ non constant tel que $P(0) \neq 0$ et $AB = P(A)$. Montrer que A est inversible puis que A et B commutent.

▷ *Éléments de correction.* Soit $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = P(0) + XQ$. Avec cette notation, la condition $AB = P(A)$ se réécrit $A(B - Q(A)) = P(0)I_n$: par conséquent, A est inversible d'inverse

$$\frac{1}{P(0)}(B - Q(A)).$$

Par suite, B s'écrit $A^{-1}P(A)$, donc commute avec A . ◁

6.13. Exercice. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E dont le polynôme minimal est de la forme

$$\mu_u = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^2,$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des scalaires deux à deux distincts.

1. Montrer qu'il existe une base $(H_1, \dots, H_{2n})$ de $\mathbf{K}_{2n-1}[X]$ telle que

▷ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$H_k(\lambda_i) = \delta_{k,i} \quad \text{et} \quad H'_k(\lambda_i) = 0,$$

▷ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$H_{n+k}(\lambda_i) = 0 \quad \text{et} \quad H'_{n+k}(\lambda_i) = \delta_{k,i}.$$

2. En déduire une expression des puissances de u en fonction de la famille de polynômes $(H_1, \dots, H_{2n})$.

▷ Éléments de correction.

1. L'application

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{2n-1}[X] & \rightarrow & \mathbf{K}^{2n} \\ P & \mapsto & (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n), P'(\lambda_1), \dots, P'(\lambda_n)) \end{cases}$$

est linéaire et injective (si P est dans son noyau, alors il admet n racines doubles et est de degré au plus $2n-1$ donc est nul) : c'est donc un isomorphisme.

On obtient la famille désirée en prenant les antécédents de la base canonique de $\mathbf{K}^{2n}$.

Ces polynômes sont appelés *polynômes interpolateurs de Hermite*. On peut en obtenir une expression explicite à partir des polynômes interpolateurs élémentaires de Lagrange $L_1, \dots, L_n$ associés aux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$H_k = (1 - 2L'_k(\lambda_k)(X - \lambda_k))L_k^2, \quad H_{n+k} = (X - \lambda_k)L_k^2.$$

2. Effectuons la division euclidienne de X^m par μ_u : il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ et $R \in \mathbf{K}_{2n-1}[X]$ tels que $X^m = Q\mu_u + R$.

On vérifie que, $R(\lambda_k) = \lambda_k^m$ et $R'(\lambda_k) = m\lambda_k^{m-1}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi,

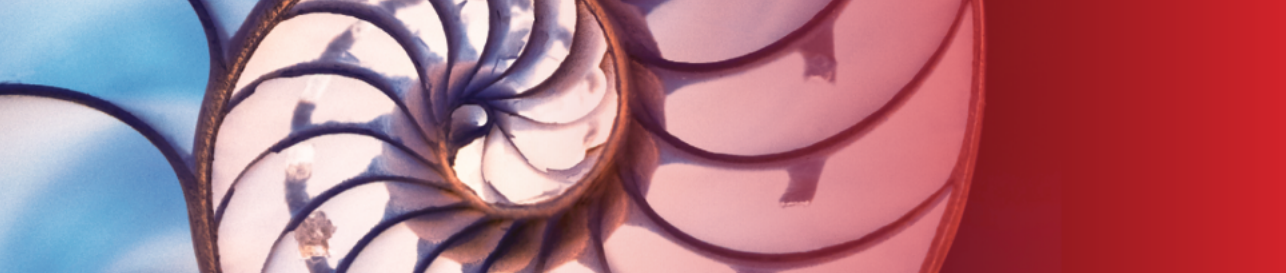
$$R = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m H_k + \sum_{k=1}^n m\lambda_k^{m-1} H_{n+k},$$

car la différence de ces deux membres est le polynôme nul puisqu'elle appartient au noyau de l'isomorphisme de la première question.

On applique ensuite le morphisme d'algèbres associé à u pour obtenir l'expression

$$u^m = R(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m H_k(u) + \sum_{k=1}^n m\lambda_k^{m-1} H_{n+k}(u).$$

◁



Algèbre linéaire

Rédigé pour les étudiants en licence de mathématiques et pour les élèves des classes préparatoires scientifiques, ce manuel d'algèbre linéaire est consacré à la réduction des matrices et des endomorphismes. Il rassemble – en 16 chapitres – tout ce que l'étudiant doit maîtriser de cette partie spécifique du programme.

Afin d'aborder les différents aspects de la théorie de la réduction, les premiers chapitres détaillent avec soin les objets et concepts de l'algèbre linéaire. Les chapitres suivants présentent aussi bien les critères pratiques que leurs utilisations théoriques, à l'appui de nombreux exemples. Cette approche pédagogique offre également une base solide de révision pour tous les **candidats aux concours de l'enseignement**.

Cette troisième édition intègre deux nouveaux chapitres consacrés respectivement à la réduction des endomorphismes particuliers d'un espace euclidien et à l'exponentielle de matrices. Plus de 50 exercices ont été ajoutés.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. Polynômes d'endomorphismes | 10. Réduction dans un espace euclidien |
| 2. Sous-espaces stables | 11. Réduction de Jordan |
| 3. Commutation | 12. Réduction de Frobenius |
| 4. Lemme des noyaux | 13. Topologie des classes de similitude |
| 5. Éléments propres, caractéristiques | 14. Localisation des valeurs propres |
| 6. Endomorphismes cycliques | 15. Application aux chaînes de Markov finies |
| 7. Théorème de Cayley & Hamilton | 16. Exponentielle de matrices |
| 8. Diagonalisation | Annexe : Parallèle avec les groupes abéliens finis |
| 9. Trigonalisation | Notations – Index |

LES PLUS

- **174 exercices d'application avec corrigés détaillés**
- **Nombreux commentaires et développements pour aller plus loin**

Roger Mansuy est professeur de chaire supérieure au lycée Saint-Louis (Paris) ; il intervient également en école d'ingénieur (ENSTA). Membre du jury de l'agrégation externe de 2011 à 2015, il a écrit plusieurs ouvrages à destination des étudiants de classes préparatoires et des universités.

Maître de conférences honoraire à l'Université de Paris, **Rached Mneimné** a enseigné à tous les niveaux, depuis la L1 jusqu'au M2. Plusieurs fois membre du jury de l'agrégation externe, il est l'auteur de nombreux ouvrages de référence en algèbre et géométrie. Il dirige également les éditions Calvage & Mounet.

ISBN : 978-2-8073-3661-2



deboeck
SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com